

AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO POR MÍNIMOS QUADRADOS COM ANÁLISE NA ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO

Silvio Jacks dos Anjos Garnés ¹
Raimundo José Borges de Sampaio ²
Quintino Dalmolin ²

¹ CESUP-Centro de Ensino Superior
Prof. Plínio Mendes Dos Santos
Departamento de Geociências
Av. Ceará, 333 - Bairro Miguel Couto
CEP 79033-010 - Campo Grande -MS
Fone (067) 382-7660 - Fax (067) 724-0809

² UFPR - Universidade Federal do Paraná
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
Centro Politécnico- Jardim das Américas
CEP 81531-990 - Curitiba -PR
Fone (041) 366-2323 - Fax (041) 266-2393

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo mostrar os problemas de estabilidade que podem surgir na solução do problema de mínimos quadrados. Compara cinco métodos de solução para sistemas de equações lineares redundantes e para o caso geral, quando as equações residuais são não-lineares são comparados dois métodos de solução, um de convergência local e outro de convergência global.

ABSTRACT

The aim of this work is to discuss some problems of instability that appears when we are dealing with least square problems. It compares the

performance of five methods for the solution of overdetermined system of linear equation and two others for the solution of overdetermined system of nonlinear equations, one with properties of local convergence and another one with properties of global convergence.

1. INTRODUÇÃO

O método de mínimos quadrados desde sua aplicação pela primeira vez de maneira independente por Gauss (1809) e Legendre (1806), tem se transformado no principal método de ajustamento de observações. A partir de seu surgimento e até pouco tempo atrás, o método tinha limitações com relações a aplicação em certos problemas por causa da quantidade de operações exigidas para chegar a um resultado. Hoje, felizmente, os computadores e calculadoras eliminaram praticamente essas limitações. No entanto, há certos cuidados que se deve tomar quando for solucionar um problema de mínimos quadrados. Quando as equações residuais são lineares ou foram linearizadas pode ocorrer que o sistema formado seja um sistema "mal-condicionado". Nesta situação, por causa da precisão finita dos computadores ou calculadoras, a solução encontrada utilizando um método qualquer pode ser uma solução errada.

No caso de se estar num processo iterativo, a solução correta será um passo na direção de decrescimento da função, mas ocorrendo uma solução errada o passo permanecerá em direção indesejada e o método acabará divergindo.

Este trabalho mostra de maneira resumida algumas das análises que podem ser realizadas para detectar se o problema é ou não mal-condicionado, métodos numéricos de solução para o problema de mínimos quadrados linear e métodos iterativos para o problema de mínimos quadrados não-linear.

O problema de mínimos quadrados é definido como:

$$\min f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{V}(\mathbf{x})\|^2 \quad (1.1)$$

onde:

$f(\mathbf{x})$: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (função objetivo);

$\|(\cdot)\|$: norma euclidiana;

$\mathbf{V}(\mathbf{x})$: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (função residual).

É muito comum nas ciências observacionais, ponderar as equações residuais. Quando existe essa ponderação o problema é então definido por:

$$\min f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{V}(\mathbf{x})\|_w^2 \quad (1.2)$$

onde:

$$\|\mathbf{V}(\mathbf{x})\|_w^2 \Leftrightarrow \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V};$$

sendo \mathbf{P} a matriz dos pesos.

2. RESULTADOS DE ANÁLISE

i) *Problema de mínimos quadrados linear*

O problema de mínimos quadrados é dito ser linear quando as equações residuais são lineares:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \quad (2.1)$$

onde:

- $\mathbf{V}_{(m \times 1)}$: vetor dos resíduos;
- $\mathbf{A}_{(m \times n)}$: matriz de coeficientes dos parâmetros;
- $\mathbf{x}_{(n \times 1)}$: vetor dos parâmetros;
- $\mathbf{b}_{(m \times 1)}$: vetor dos termos independentes.

Existência de solução

Quando em (2.1) o vetor \mathbf{b} pertence ao espaço coluna da matriz \mathbf{A} , o vetor dos resíduos \mathbf{V} é nulo e o sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é consistente, tornando-se irrelevante aplicar o critério de mínimos quadrados.

Quando em (2.1) o vetor \mathbf{b} não pertence ao espaço coluna da matriz \mathbf{A} , o sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é inconsistente e uma solução aproximada é solicitada. Tal solução aproximada pode ser obtida usando o critério de mínimos quadrados (1.1) ou (1.2) caso haja ponderação.

A exemplo de se usar (1.1) tem-se:

$$\min f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 \quad (2.2)$$

Para a solução de (2.2) quando a matriz \mathbf{A} tem posto completo, podem ser usados pelo menos três caminhos:

a) Pelas equações normais de mínimos quadrados

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.3)$$

b) Pela decomposição QR

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b} \quad (2.4)$$

c) Pela pseudo-inversa

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (2.5)$$

Quando \mathbf{A} não tem posto completo, soluções básicas podem ser encontradas, mas a atenção neste caso é para a solução de comprimento mínimo

$$\min f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 \quad (2.6)$$

sujeito a: $\|\mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ (\mathbf{x}^* é solução de comprimento mínimo).

A solução para (2.6) é a mesma do item c, ou seja

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (2.7)$$

Métodos de solução

a) Pelas equações normais de mínimos quadrados

Muitos são os métodos numéricos para resolver a equação (2.3), dentre eles, foi usado Gauss-Jordan por sua popularidade no meio acadêmico, sub-rotina "versol" pela sua aplicação nas Ciências Geodésicas e decomposição de Cholesky por sua velocidade.

O método de Gauss-Jordan, basicamente consiste em aplicar operações elementares em $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$, quando $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ transformar-se na matriz identidade \mathbf{I} , o vetor $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$ transforma-se no vetor solução do sistema. Neste método deve ser utilizado algoritmos que façam permutação de linhas e colunas para aumentar a estabilidade.

A inversão de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ através da sub-rotina "versol", utiliza o rebaixamento do determinante através da regra de Chió, o algoritmo é bastante compacto e simples de programar. O desenvolvimento desse método é encontrado em MODRO (1981).

O método de Cholesky puro, só pode ser utilizado para quando a matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é definida positiva. Isso é assegurado desde que \mathbf{A} tenha posto completo (hipótese inicial). O método sem muitos detalhes é como segue:

1. $\mathbf{LL}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (decomposição de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ no produto de duas triangulares \mathbf{LL}^T)
2. substituir $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ por \mathbf{LL}^T no sistema de equações normais
 $\mathbf{LL}^T \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$
3. $\mathbf{Ly} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ (resolver para \mathbf{y})
4. $\mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (resolver para \mathbf{x} que é a solução do problema)

Um algoritmo para a decomposição de Cholesky é encontrado em GASTINEL (1971).

b) Pela decomposição **QR**

B. Ci. Geodésicas, Curitiba, v. 2, p.3-11, 1997.

Usando as transformações de Householder, se pode transformar a matriz A em QR , sendo Q uma matriz ortogonal e R uma matriz triangular superior. Uma maneira de ver como se obtém a solução do problema de mínimos quadrados, é substituir a matriz A pela matriz QR no sistema de equações normais

$$\begin{aligned} A^T A x &= A^T b \\ R^T Q^T Q R x &= R^T Q^T b \Rightarrow R x = (R^T)^{-1} R^T Q^T b \\ R x &= Q^T b \end{aligned}$$

Uma sub-rotina para essa transformação é encontrado em DENIS e SCHNABEL (1983).

c) Pela pseudo-inversa

A pseudo-inversa ou inversa generalizada de Mooré Penrose a qual resolve (2.5) e (2.7) pode ser obtida pela decomposição de valor singular (SVD).

A decomposição de valor singular de A se escreve $A = U D V^T$, onde: U é uma matriz ortogonal de dimensão ($m \times m$); V é uma matriz ortogonal de dimensão ($n \times n$); e D é definida por $d_{ii} = \sigma_i \geq 0$, $i=1, \dots, k$; $d_{ij} = 0$, $i \neq j$. As quantidades $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ são os valores singulares de A .

A pseudo-inversa A^+ a partir da decomposição de valor singular é calculada por:

$$A^+ = V D^+ U^T, \text{ onde: } D^+ \text{ é obtido por } d_{ii}^+ = 1/\sigma_i, i > 0; d_{ii}^+ = 0, i = 0; d_{ij}^+ = 0, i \neq j.$$

Uma sub-rotina para calcular a decomposição de valor singular de A é encontrada em PRESS *et alii* (1986).

Análise na estabilidade da solução pelo número de condição

Chama-se número de condição de uma matriz A e denota-se por $C(A)$, o produto da norma da inversa de A pela norma de A . Em notação matemática:

$$C(A) = \|A^+\| \|A\|. \quad (2.8)$$

Para o caso da norma da matriz $\|(\cdot)\|$ ser a norma-2, o número de condição é o quociente do maior valor singular de A pelo menor valor singular de A , ou seja,

$$C(A) = \sigma_{\max} : \sigma_{\min} \quad (2.9)$$

O número de condição da matriz de coeficientes dos parâmetros é muito importante para análise se um sistema é ou não mal-condicionado, pois ele dá a máxima ampliação que a variação relativa da solução pode sofrer frente a uma perturbação ou no vetor de termos independentes ou na matriz dos coeficientes.

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \leq C(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.10)$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}\|} \leq C(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (2.11)$$

A análise por (2.10) e (2.11) através do número de condição é perfeitamente aplicável ao sistema de equações normais, lembrando apenas que $C(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \cong C(\mathbf{A})^2$, ou seja, o número de condição de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ é da ordem do quadrado do número de condição de \mathbf{A} , motivo pelo qual sempre que possível deve-se evitar resolver o problema de mínimos quadrados através das equações normais.

Para o caso das equações originais $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, a análise pelo número de condição pode ser feita através das seguintes expressões (GILL *et alii* 1991).

- Para perturbações no termo independente

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq C(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{b}_R\|}{\|\mathbf{b}_R\|} \quad (2.12)$$

$$\delta \mathbf{V} = \delta \mathbf{b}_N \quad (2.13)$$

onde:

$\delta \mathbf{b}_R$ = perturbação em \mathbf{b} no espaço coluna de \mathbf{A} ;

$\delta \mathbf{b}_N$ = perturbação em \mathbf{b} no espaço nulo de \mathbf{A}^T .

- Para perturbações na matriz \mathbf{A} sem mudança no posto da matriz

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 2C(\mathbf{A})\mathbf{e}_R + 4C(\mathbf{A})^2\mathbf{e}_N \frac{\|\mathbf{b}_N\|}{\|\mathbf{b}_R\|} + O(\mathbf{e}_N^2) \quad (2.14)$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{V}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq e_N + 2C(\mathbf{A})e_N + O(e_N^2) \quad (2.15)$$

sendo:

$$e_R = \frac{\|\delta \mathbf{A}_R\|}{\|\mathbf{A}\|}; \quad e_N = \frac{\|\delta \mathbf{A}_N\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\delta \mathbf{A}_R = \mathbf{G}^T \delta \mathbf{A}; \quad \delta \mathbf{A}_N = \mathbf{K}^T \delta \mathbf{A}$$

onde:

\mathbf{G} = base ortonormal do espaço coluna de \mathbf{A} ;

\mathbf{K} = base ortonormal do espaço nulo de \mathbf{A}^T ;

$\delta \mathbf{A}$ = perturbação na matriz \mathbf{A} .

ii) *Problema de mínimos quadrados não-linear*

Quando as equações residuais são não-lineares, estas podem ser linearizadas usando a expansão em série de Taylor até a primeira ordem

$$\mathbf{V}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} \quad (2.16)$$

onde:

$\mathbf{V}_c(\mathbf{x})_{(mx1)}$: aproximação linear de $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ no ponto (\mathbf{x}_0) ;

$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)_{(mxn)}$: matriz jacobiano da função residual;

$\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)_{(mx1)}$: função residual avaliada no ponto (\mathbf{x}_0) ;

$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_{(nx1)}$: vetor das correções aos parâmetros aproximados.

a) *método de Gauss-Newton*

O método de Gauss-Newton utiliza o modelo afim (2.16) a partir de um ponto de valor aproximado \mathbf{x}_0 , que iterativamente deve alcançar o ponto \mathbf{x}^* que minimiza $f(\mathbf{x})$.

O passo do método, pode ser visto como sendo a solução do problema de mínimos quadrados linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^T \Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \quad (2.17)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$$

sendo: i = iteração antecedente; $i+1$ = iteração atual.

Detalhes sobre a razão de convergência local e convergência do método pode ser encontrado em DENNIS e SCHNABEL (1983).

b) método de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt na prática tem características de convergência global (converge para o mínimo local a partir de qualquer valor aproximado), o limite do tamanho do passo é feito através do uso da região de confiança. O método fica caracterizado como:

$$\min \| \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \|^2 \quad (2.18)$$

$$\text{sujeito a: } \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| \leq \delta_c$$

sendo δ_c um escalar que define a região de confiança.

A solução do problema acima (DENNIS e SCHNABEL 1983) é:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_i) + \mu_c \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \quad (2.19)$$

onde:

$\mu_c = 0$ se $\delta_c \geq \|[\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{V}(\mathbf{x}_i)\|$; e $\mu_c > 0$ caso contrário

Um algoritmo para o método acima é encontrado em PRESS *et alii* (1986).

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Serão mostrados a seguir resultados numéricos para o problema de mínimos quadrados linear e para o problema de mínimos quadrados não-linear.

Problema de mínimos quadrados linear

Será mostrado com esse problema a equivalência das soluções entre o método QR e o método da decomposição de valor singular, e também que os métodos de solução usando as equações normais não são consistentes uns com o outros para a precisão em que se está trabalhando.

Considere o sistema $(\mathbf{Ax}=\mathbf{b})$ abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,000\,001 \\ 1 & 1,000\,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,000\,01 \\ 4,000\,01 \end{bmatrix}$$

Os valores singulares para a matriz **A** são:

$\sigma_{\min} = 5,7734886323\text{E-}07$ e $\sigma_{\max} = 2,4494905593$. O número de condição para a norma-2 é: $C(\mathbf{A})=4\,242\,652,433$. Como a unidade de arredondamento em que se está trabalhando é $1\text{E-}12$ e $C(\mathbf{A}) > 1/\sqrt{1\text{E-}12}$, não é seguro resolver o problema acima através das equações normais.

A tabela 1 mostra as soluções e a norma do resíduo do problema acima para os cinco métodos anteriormente descritos.

Para ver como o problema acima é mal-condicionado basta fazer uma pequena variação no elemento b_1 , passando de 2 para 1.999 999, a solução é mostrada na tabela 2.

Mais exemplos a respeito desse assunto podem ser encontrados em GARNÉS (1996).

	Gauss-Jordan	Versol	Cholesky	QR	SVD
x_1	2	1	1,333 339 5	-7,999 963 4	-8,000 029 6
x_2	6,666 665E-6	0	0,666 666 6	9,999 963 7	10,000 002 9
$\ V\ $	2,828 427 12	3,316 630	2,828 427 1	2,828 427 1	2,828 427 1

TABELA 1 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO PERTURBADO

	Gauss-Jordan	Versol	Cholesky	QR	SVD
x_1	0,000 000	0,000 000	5,133 335E-6	-9,199 960	-9,200 034
x_2	2,000 005	1,000 000	2,000 000	11,199 959	11,200 033
$\ V\ $	2,828 426 84	3,316 629	2,828 426 84	2,828 426	2,828 426

TABELA 2 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM PERTURBAÇÃO

Problema de mínimos quadrados não-linear

Considere o seguinte problema GEMAEL(1974), DALMOLIN (1976).

Foi medido a partir de um ponto P de coordenadas desconhecidas as distâncias l_1, l_2, l_3 e l_4 até 4 pontos de coordenadas conhecidas P_1, P_2, P_3 e P_4 . Também foi medido o ângulo $P_1 P P_2$. Em todas as medidas é conhecido o desvio padrão σ_i , $i=1, \dots, 5$. Os dados estão na tabela a seguir.

B. Ci. Geodésicas, Curitiba, v. 2, p.3-11, 1997.

Est.	X(m)	Y(m)	Observações		desvio padrão	
P ₁	842,281	925,523	l ₁	244,512 m	σ_1	0,012 m
P ₂	1337,544	996,249	l ₂	321,570 m	σ_2	0,016 m
P ₃	1831,727	723,962	l ₃	773,154 m	σ_3	0,038 m
P ₄	840,408	658,345	l ₄	279,992 m	σ_4	0,014 m
			P ₁ PP ₂	123°38'01.4"	σ_5	2,0"

TABELA 3 - DADOS DO PROBLEMA

pede-se as coordenadas de P ajustadas por mínimos quadrados.

Os resultados a serem mostrados a seguir foram obtidos através de um programa computacional em linguagem "turbo pascal 6.0". Foram utilizados dois valores iniciais para testar os métodos. Primeiro com os valores (1065;825) e depois com os valores (825;1065), os resultados dos parâmetros encontrados estão nas tabelas a seguir.

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃
x _p	1065,00	1 065,255 4895	1 065,255 402	1 065,255 402
y _p	825,00	825,185 719 1	825,185 719 41	825,185 719 1

TABELA 4 - CONVERGÊNCIA POR GAUSS-NEWTON

Na 3ª iteração ocorreu a convergência usando o critério $\|x_{i+1}-x_i\|_\infty < 1e-8$.

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃
x _p	1065,00	1 065,255 286 7	1 065,255 402	1 065,255 402
y _p	825,00	825,185 431 8	825,185 719 07	825,185 719 1
μ	0,001	0,0001	1e-05	1e-06

TABELA 5 - CONVERGÊNCIA POR LEVENBERG-MARQUARDT

Na 3ª iteração ocorreu a convergência usando o critério $\|x_{i+1}-x_i\|_\infty < 1e-8$.

	x ₀	x ₁	x ₂	x ₁₀₀
x _p	825,00	314,544 627 25	106,888 819 32	-13 474,495 020
y _p	1065,00	1 022,170 538 9	-1 333,524 914	-15 897,367 574

TABELA 6 - NÃO-CONVERGÊNCIA POR GAUSS-NEWTON

	x_0	x_1	...	x_{15}	x_{16}
x _p	825,00	315,590 670 2	...	1 065,255 402	1 065,255 402
y _p	1065,00	1 025,627 327	...	825,185 719 1	825,185 719 1
μ	0,001	0,0001	...	1e-06	1e-07

TABELA 7 - CONVERGÊNCIA POR LEVENBERG-MARQUARDT

Na 16ª iteração ocorreu a convergência usando o critério

$$\|x_{i+1} - x_i\|_{\infty} < 1e^{-8} \text{ e } \|\nabla f(x)\|_{\infty} < 1e^{-04}.$$

4. CONCLUSÕES

Através dos exemplos anteriores e teoria exposta, pode-se concluir:

a) para o problema de mínimos quadrados linear deve-se evitar a formação das equações normais sempre que o número de condição for superior ao inverso da raiz quadrada da unidade de arredondamento que o computador está trabalhando.

A análise para verificar o mal-condicionamento do problema através de perturbações no vetor de termos independentes ou na matriz dos coeficientes deve sempre ser observado o vetor solução e o vetor dos resíduos.

Sempre que possível deve-se fazer a análise do condicionamento através dos valores singulares. Se estes estiverem espaçados de maneira discrepante, fica evidenciado o mal-condicionamento do problema. Para a solução de comprimento mínimo é útil usar um algoritmo que permita zerar valores singulares abaixo de um determinada quantidade e que possa ser manipulada, pois se for pré-fixada para certa quantidade, pode-se não ter a solução de comprimento mínimo, quando esta for desejada.

b) para o problema de mínimos quadrados não-linear a preferência na solução fica por conta do método de Levenberg-Marquardt por causa de sua convergência global.

Na solução de cada iteração do método de Gauss-Newton quando este for utilizado, recomenda-se usar o método da decomposição QR para manter a estabilidade na solução e por consequência a direção de decrescimento da função a ser minimizada.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 DALMOLIN, Q. Ajustamento de observações pelo processo iterativo. Curitiba, 1976. Dissertação (Mestrado em Geodésia) - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR.

- 02 DENIS, J. E; SCHNABEL, R. B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. New Jersey: Prentice Hall, 1983. 378p.
- 03 GARNÉS, S.J.D.A. Ajustamento paramétrico por mínimos quadrados com análise na estabilidade da solução. 1996. Dissertação (Mestrado em Geodésia) - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.UFPR.
- 04 GASTINEL, N. Linear numerical analysis. New York: Academic Press, 1971. 350 p.
- 05 GEMAEL, C. Aplicações do cálculo matricial em geodésia. 2ª parte: ajustamento de observações. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR. 1974.
- 06 GILL, P. E ; MURRAY, W; WRIGHT, M.H. Numerical linear algebra and optimization. California: Addison-Wesley, 1991. vol.1, 426 p.
- 07 LAWSON, C.L ; HANSON,R.J. Solving least squares problems. New Jersey: Prentice-Hall, 1974. 340 p.
- 08 LUENBERGER,D.G. Introdução to linear and nonlinear programming. California: Addison-Wesley, 1973. 356 p.
- 09 LUGNANI, J.B. O problema dos sistemas de equações lineares mal condicionados e suas implicações em geodésia. Curitiba, 1975. Dissertação (Mestrado em Geodésia) - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR.
- 10 MODRO, N. Métodos para inversão de matrizes : aplicações às ciências geodésicas. Curitiba, 1981. Dissertação (Mestrado em Geodésia) - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR.
- 11 PRESS, W. H *et al.* Numerical recipes the art of scientific computing. Cambrige: Cambrige University Press, 1986. 818 p.
- 12 STRANG, G. Linear algebra and its application. 2. ed.. New York: Academic Press, 1976. 414 p.

(Recebido em 10/07/96. Aceito para publicação em 19/08/96.)